



# Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a VII-a

## Barem de evaluare

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	<p>Condiții: <math>a, b, c, d \notin \{9\}</math>.</p> $\overline{0,abc(d)} = \frac{\overline{abcd} - \overline{abc}}{9000} = \frac{900 \cdot a + 90 \cdot b + 9 \cdot c + d}{9000};$ $\overline{0,bad(c)} = \frac{\overline{badc} - \overline{bad}}{9000} = \frac{900 \cdot b + 90 \cdot a + 9 \cdot d + c}{9000};$ $\overline{0,cda(b)} = \frac{\overline{cdab} - \overline{cda}}{9000} = \frac{900 \cdot c + 90 \cdot d + 9 \cdot a + b}{9000};$ $\overline{0,dcba(a)} = \frac{\overline{dcba} - \overline{dcb}}{9000} = \frac{900 \cdot d + 90 \cdot c + 9 \cdot b + a}{9000}$	2p
	$r = \frac{1000 \cdot (a + b + c + d)}{9000} \Leftrightarrow r = \frac{a + b + c + d}{9};$	2p
	<p>Din ipoteză, <math>r</math> este fracție zecimală finită. Atunci</p> $\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 9 \cdot k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \max(a + b + c + d) < 36 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 \cdot k \in \{0, 9, 18, 27\} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}.$ <p>Rezultă <math>r \in \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}</math>.</p>	3p

2.	<p>Vom arăta că dacă <math>\frac{a}{b}</math> și <math>\frac{c}{d}</math> sunt fracții ireductibile și <math>\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{N}</math> atunci <math>b = d</math>.</p> <p>Într – adevăr, <math>\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{N} \Rightarrow b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c</math>.</p> $\left. \begin{array}{l} b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c \\ b \cdot d \mid b \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \cdot d \mid a \cdot b \cdot d + b^2 \cdot c \\ b \cdot d \mid a \cdot b \cdot d \end{array} \right. \Rightarrow b \cdot d \mid b^2 \cdot c.$ $\left. \begin{array}{l} b \cdot d \mid b^2 \cdot c \\ (c, d) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow d \mid b. \quad (1)$ $\left. \begin{array}{l} b \cdot d \mid a \cdot d + b \cdot c \\ b \cdot d \mid b \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \cdot d \mid a \cdot d^2 + b \cdot c \cdot d \\ b \cdot d \mid c \cdot b \cdot d \end{array} \right. \Rightarrow b \cdot d \mid a \cdot d^2$ $\left. \begin{array}{l} b \cdot d \mid a \cdot d^2 \\ (a, b) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow b \mid d. \quad (2)$ <p>Din (1) și (2) <math>\Rightarrow b = d</math>.</p>	3p
	<p>Să demonstrăm că <math>(7 \cdot n + 4, 5 \cdot n + 3) = 1</math> și <math>(13 \cdot m + 8, 5 \cdot m + 3) = 1</math>.</p> <p>Fie <math>p \in \mathbb{N}^*</math>, astfel încât</p> $\left. \begin{array}{l} p \mid 7 \cdot n + 4 \\ p \mid 5 \cdot n + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \mid 35 \cdot n + 20 \\ p \mid 35 \cdot n + 21 \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid 1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow (7 \cdot n + 4, 5 \cdot n + 3) = 1.$ <p>Fie <math>q \in \mathbb{N}^*</math>, astfel încât</p> $\left. \begin{array}{l} q \mid 13 \cdot m + 8 \\ q \mid 5 \cdot m + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q \mid 65 \cdot m + 40 \\ q \mid 65 \cdot m + 39 \end{array} \right\} \Rightarrow q \mid 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow (13 \cdot m + 8, 5 \cdot m + 3) = 1.$	2p
	<p>Dar</p> $A \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 \cdot n + 3 = 5 \cdot m + 3 \Rightarrow m = n.$ <p>Deci <math>A = \frac{7 \cdot n + 4}{5 \cdot n + 3} + \frac{13 \cdot n + 8}{5 \cdot n + 3} = \frac{20 \cdot n + 12}{5 \cdot n + 3} = 4 \in \mathbb{N}.</math></p> <p>Așadar, există un singur număr natural <math>A = 4</math>.</p>	2p
3.	$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1003} \right) =$ $= \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \dots + \frac{1}{2006}$	3p

	$A = \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + \dots + \frac{1}{1003} = \frac{2}{1004} + \frac{2}{1006} + \dots + \frac{2}{2006}.$ <p>Prin urmare,</p> $A = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1004} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1008} + \dots + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2006}$ <p>și <math>B = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \dots + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006}</math></p>	2p
	Comparând termen cu termen, obținem că $A > B$ .	2p
4.	<p>i) <math>\triangle ADE \equiv \triangle AHB (LU.L) \Rightarrow [DE] \equiv [BH], \angle ADE \equiv \angle AHB</math>.</p> <p>Fie <math>AD \cap HR = \{S\}</math>. Triunghiurile <math>\triangle HAS</math> și <math>\triangle DRS</math> au: <math>\angle ADE \equiv \angle AHB</math> și <math>\angle HSA \equiv \angle DSR</math> (<math>\angle</math>-uri opuse la vârf)</p> <p>Rezultă <math>m(\angle HAD) = m(\angle HRD) = 90^\circ \Rightarrow BH \perp DE</math>.</p>	2p
	<p>ii) În triunghiul <math>\triangle DEB</math>, OM este linie mijlocie <math>\Rightarrow OM \parallel DE</math> și <math>OM = \frac{1}{2} \cdot DE</math>.</p> <p><math>\triangle DBH</math>, ON este linie mijlocie <math>\Rightarrow ON \parallel BH</math> și <math>ON = \frac{1}{2} \cdot BH</math>.</p> <p>Dar <math>[DE] \equiv [BH] \Rightarrow [OM] \equiv [ON]</math> ;</p> <p><math>BH \perp DE \Rightarrow OM \perp ON</math>.</p>	2p
	<p>b) Se aplică punctele i) și ii) triunghiurilor:</p> <p><math>\triangle ABD \Rightarrow [DE] \equiv [BH], [OM] \equiv [ON]</math> și <math>OM \perp ON</math>;</p> <p><math>\triangle BCD \Rightarrow [DF] \equiv [BG], [OP] \equiv [OQ]</math> și <math>OP \perp OQ</math>.</p> <p><math>\triangle ADE \equiv \triangle CBG (LU.L) \Rightarrow [DE] \equiv [BG]</math></p> <p><math>\triangle ABE \equiv \triangle CDG (LU.L) \Rightarrow [BE] \equiv [DG]</math></p> <p><math>\left. \begin{matrix} [DE] \equiv [BG] \\ [BE] \equiv [DG] \end{matrix} \right\} \Rightarrow EBGD \text{ paralelogram} \Rightarrow BE \parallel DG, [BE] \equiv [DG];</math></p> <p><math>OM = \frac{1}{2} \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BG = OP;</math></p> <p><math>\left. \begin{matrix} OM \parallel DE \\ OP \parallel BG \\ DE \parallel BG \end{matrix} \right\} \Rightarrow M, O, P \text{ coliniare. Analog, punctele N, O, Q, sunt coliniare.}</math></p> <p>Rezultă că patrulaterul MNPQ este pătrat.</p>	3p